УДК 624.121:550.3

А.П.ГОСПОДАРИКОВ, *д-р техн. наук, профессор, kafmat@spmi.ru*
М.В.МАКСИМЕНКО, *аспирант, mig_sab@rambler.ru,*
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», Санкт-Петербург

A.P.GOSPODARIKOV, *Dr. in eng. sc., professor, kafmat@spmi.ru*
M.V.MAKSIMENKO, *post-graduate student, mig_sab@rambler.ru,*
National Mineral Resources University (Mining University), Saint Petersburg

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОГО ХАРАКТЕРА ПРОЦЕССА ИХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Рассмотрена нелинейная краевая задача об исследовании напряженно-деформированного состояния (НДС) массива горных пород вокруг одиночной горизонтальной протяженной выработки. Предложен алгоритм определения основных параметров НДС горного массива, включающий комплекс вычислительных методов.

***Ключевые слова*:** физическая нелинейность, метод линеаризации Ньютона – Канторовича – Рафсона.

THE METHOD OF ANALYSIS STRESS-AND-STRAIN STATE OF A ROCK MASSIF WITH REGARD TO NONLINEAR CHARACTER OF STRAINING PROCESS

The nonlinear problem of analysis of the stress-and-strain state of rock massif is discussed. The numerical algorithm analysis of the stress-strain state of a massif, which includes a set of computational methods, is suggested.

***Key words*:** physical nonlinearity, Newton – Kontorovich – Raphson linearization method.

В связи с переходом подземных горных работ в основных угольных бассейнах страны на более глубокие горизонты значительно ухудшаются горно-геологические условия разработки пластов. На глубоких шахтах существенно увеличиваются расходы на ремонт, перекрепление подготовительных выработок, усложняются мероприятия по борьбе с опасными проявлениями горного давления, что в конечном итоге приводит к значительному росту смещений горных пород вокруг выработок [2]. Поэтому традиционные методы охраны объектов от вредных влияний горных работ в современных условиях все чаще становятся или неэффективными, или вовсе неприемлемыми. С практической точки зрения очень важно иметь представление о реальном распределении компонент тензоров напряжений и деформаций, а также вектора перемещений в массивах пород при наличии горных выработок различного назначения и очертания, целиков, с учетом выработанного пространства и т.д.

Получение аналитических решений в таких случаях ограничено, как правило, выбором простой физической модели среды (сплошная, изотропная и однородная) в рамках применимости линейного закона Гука и формой выработки (круглая). Математическое моделирование неоднородного породного массива, ослабленного одной или несколькими подземными выработками сложного очертания, а также учет нелинейного характера процесса деформирования горных пород предполагают использование эффективных численных методов.

Проведение выработки с физической точки зрения представляет собой образование некоторой пространственной полости в массиве горных пород. Анализ геометрических параметров рассматриваемого объекта приводит к тому, что граничные поверхности последнего представляют собой многосвязные области, учет которых существенно усложняет процедуры нахождения решения рассматриваемой задачи. Установлено, что для выработок, располагающихся на достаточно большой глубине H, погрешность от замены реальных граничных условий (земная поверхность) на задачу с односвязным контуром (отверстие в тяжелой плоскости) быстро убывает с увеличением глубины залегания последних [1].

В работе принята физическая модель нелинейно-упругой среды (нелинейная связь между компонентами тензоров напряжений и деформаций). Начальное поле напряжений в массиве горных пород формируется под действием гравитационных сил.

Отметим также, что для случая одиночной протяженной горизонтальной выработки, у которой длина во много раз превышает два других характерных размера (высоту и ширину), пространственная задача по определению основных параметров НДС массива горных пород может быть сведена к плоской.

Учитывая, что фактическое влияние выработки на породный массив является локальным и что глубина заложения выработки H превышает десять радиусов выработки и более, собственный вес горных пород имитируется приложением распределенной нагрузки интенсивностью γH к границам исследуемой невесомой области.

Таким образом, моделирование НДС массива горных пород, включающих выработку, в рамках плоской деформации сводится к следующему: рассматривается система разрешающих дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих физически нелинейную деформацию массива, дополненную надлежащими граничными условиями. Рассматриваемую двумерную нелинейную краевую задачу запишем в единой векторной форме, удобной для изложения разработанного алгоритма численного решения. Введем в рассмотрение вектор-функции:

$$\overline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}; \overline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}; \overline{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Нелинейная краевая двухмерная задача содержит восемь уравнений: два уравнения равновесия, три уравнения Коши (соотношения между компонентами тензора деформаций и компонентами вектора перемещений), а также три уравнения, устанавливающие соотношения между компонентами тензоров напряжений и деформаций (в рамках принятого нелинейного физического закона). Тогда матричная запись разрешающих уравнений примет вид

$$A^T\overline{\sigma} = 0; \overline{\varepsilon} = A\overline{u}; \overline{\sigma} = C\overline{\varepsilon},$$

где A – дифференциальный оператор, $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$; матрица C определяется из нелинейных физических соотношений между компонентами тензоров напряжений и деформаций на основе кривой деформирования $\sigma - \varepsilon$. В частности, в работе используется закон, предложенный Бахом, и связь между напряжениями и деформациями представлена в виде степенной зависимости $\sigma_i - B_i \varepsilon_i^{\alpha_i}$, где B_i $(i = 1,2,3\ldots)$ – коэффициенты деформирования, Па; $\alpha_i \leq 1$ получены экспериментальным путем [1].

Граничные условия, заданные в перемещениях на контуре выработки L и на границе области Γ, имеют вид

$$\overline{u} = \overline{u}_L, \quad \overline{u} = \overline{u}_\Gamma,$$

где $\overline{u}_L = \begin{pmatrix} u_L \\ v_L \end{pmatrix}$; $\overline{u}_\Gamma = \begin{pmatrix} u_\Gamma \\ v_\Gamma \end{pmatrix}$.

Итак, исследование НДС массива горных пород, включающего выработку, сводится к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений (1) в частных производных при одновременном удовлетворении граничных условий (2) на контуре выработки и на границе рассматриваемой области.

В области $\Omega = X \times Y, X \in [0;a], Y \in [0;b]$ ищутся вектор-функции основных $\bar{V}(x,y) = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ u \\ v \end{pmatrix}$ и дополнительных $\bar{W}(x,y) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$ неизвестных, которые всюду в области Ω удовлетворяют системе *m* дифференциальных уравнений в частных производных

$$\tilde{A}\bar{V} = \bar{g}(\bar{V},\bar{W},x,y), x \in (0,a), y \in (0,b), \quad (3)$$

где $\tilde{A}$ – дифференциальный оператор

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix};$$

$$\bar{g}(\bar{V},\bar{W},x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix},$$

и ассоциированной с (3) системе *p* трансцендентных уравнений [3]

$$\bar{f}(\bar{V},\bar{W},x,y) = 0, \quad (4)$$

где $\bar{f}(\bar{V},\bar{W},x,y) = \begin{pmatrix} B_1\varepsilon_x^{\alpha_1} - \sigma_x \\ B_2\varepsilon_y^{\alpha_2} - \sigma_y \\ B_3\gamma_{xy}^{\alpha_3} - \tau_{xy} \end{pmatrix}.$

Граничные условия задаются некоторой системой уравнений общего вида

$$\bar{D}(\bar{V}_L,\bar{V}_\Gamma) = 0. \quad (5)$$

Отметим, что в рассматриваемой постановке исходной задачи $m = 5$, $p = 3$.

Рассмотрим нелинейное операторное уравнение, соответствующее системам (3)-(5) $T(\omega) = 0$. Под ω понимается вектор-функция $\bar{\omega}(x,y) = [\bar{V}(x,y), \bar{W}(x,y)]^{\mathrm{T}}$, компоненты которой представляют собой непрерывные вместе с первыми частными производными ограниченные функции, заданные в области Ω.

Оператор $T(\omega)$, символизирующий дифференциальный оператор $\tilde{A}$ (3) и левые части уравнений (4) и (5), является дифференцируемым по Фреше нелинейным оператором в банаховом пространстве E.

Используя метод линеаризации Ньютона – Канторовича – Рафсона, представим операторное уравнение в виде

$$\begin{cases} T_1(\omega)\omega + T_2(\omega) = 0; \\ T_1(\omega) = T'_\omega(\omega), T_2(\omega) = T(\omega) - T'_\omega(\omega)\omega, \end{cases} \quad (6)$$

где T'_ω – производная Фреше нелинейного оператора $T(\omega)$.

Вводя индексы итерации $n, n-1$ в уравнение метода линеаризации (6), приходим к соотношению при каждом $n = 1,2,\ldots$:

$$T'_\omega(\omega^{n-1})\omega^n + T(\omega^{n-1}) - T'_\omega(\omega^{n-1})\omega^{n-1} = 0.$$

Применяя метод линеаризации Ньютона – Канторовича – Рафсона к краевой задаче (3)-(5), получим систему

$$\begin{cases} \tilde{A}\bar{V} = G_1(\bar{V},\bar{W},x,y)\bar{V} + G_2(\bar{V},\bar{W},x,y)\bar{W} + \\ + \bar{g}_1(\bar{V},\bar{W},x,y); \\ F_1(\bar{V},\bar{W},x,y)\bar{V} + F_2(\bar{V},\bar{W},x,y)\bar{W} + \\ + \bar{f}_1(\bar{V},\bar{W},x,y) = 0; \\ \bar{D}(\bar{V}_L,\bar{V}_\Gamma) = 0. \end{cases}$$

Отметим, что, как правило, граничные условия, записанные в перемещениях, на контуре выработки L и на границе области Γ описываются системой линейных алгебраических уравнений вида (5).

Окончательно итерационный процесс метода линеаризации Ньютона – Канторовича – Рафсона запишется в виде

$$\begin{cases} \tilde{A}\overline{V}^{n} = G_1^{n-1}\overline{V}^{n} + G_2^{n-1}\overline{W}^{n} + \overline{g}_1^{\,n-1}; \\ F_1^{n-1}\overline{V}^{n} + F_2^{n-1}\overline{W}^{n} + \bar{f}_1^{\,n-1} = 0; \\ \overline{D}(\overline{V}_L, \overline{V}_\Gamma) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

В системе (7) G_1^{n-1}, G_2^{n-1}, F_1^{n-1}, F_2^{n-1} – матрицы Якоби от вектор-функций $\overline{g}(\overline{V}, \overline{W}, x, y)$ и $\bar{f}(\overline{V}, \overline{W}, x, y)$ по тому векторному аргументу, который стоит множителем при данной матрице. Размерности этих матриц однозначно определяются размерностью искомых и заданных вектор-функций, присутствующих в уравнениях рассматриваемой краевой задачи.

Здесь и далее использованы сокращенные обозначения вида:

$$G_1^{n-1} = G_1(\overline{V}^{n-1}, \overline{W}^{n-1}, x, y);$$
$$G_2^{n-1} = G_2(\overline{V}^{n-1}, \overline{W}^{n-1}, x, y);$$
$$F_1^{n-1} = F_1(\overline{V}^{n-1}, \overline{W}^{n-1}, x, y);$$
$$F_1^{n-1} = F_1(\overline{V}^{n-1}, \overline{W}^{n-1}, x, y);$$
$$\overline{g}_1^{n-1} = g_1(\overline{V}^{n-1}, \overline{W}^{n-1}, x, y);$$
$$\bar{f}_1^{n-1} = f_1(\overline{V}^{n-1}, \overline{W}^{n-1}, x, y).$$

Векторы $\overline{g}_1^{n-1}$, $\bar{f}_1^{n-1}$, согласно заданным системам уравнений (3)-(4), определяются по формулам

$$\begin{cases} \overline{g}_1^{n-1} = \overline{g}^{n-1} - G_1^{n-1}\overline{V}^{n-1} - G_2^{n-1}\overline{W}^{n-1}; \\ \bar{f}_1^{n-1} = \bar{f}^{n-1} - F_1^{n-1}\overline{V}^{n-1} - F_2^{n-1}\overline{W}^{n-1}. \end{cases}$$

Таким образом, последовательность ω_n на каждом шаге итерации n определяется как решение линейной краевой задачи, а с учетом необходимого для численной реализации перехода к соответствующей дискретной задаче (например, на основе метода конечных элементов) – из решения системы линейных алгебраических уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вялов С.С.* Реологические основы механики грунтов: Учеб. пособие. М., 1978. 447 с.
2. Геомеханика: Учебник для вузов / И.В.Баклашов, Б.А.Картозия, А.Н.Шашенко, В.Н.Борисов. М., 2004. Т.2. 249 с.
3. *Господариков А.П.* Метод расчета нелинейных задач механики горных пород при подземной разработке пластовых месторождений. СПб, 1999. 129 с.

REFERENCE

1. *Vyalov S.S.* Rheological fundamentals of soil mechanics: Training manual for building high schools. Moscow, 1978. 447 c.
2. Geomechanics: Textbook for universities / I.V.Baklashov, B.A.Kartozia, A.N.Shashenko, V.N.Borisov. Moscow, 2004. Vol.2. 249 c.
3. *Gospodarikov A.P.* Method of calculation of nonlinear problems of rock mechanics in underground mining of bedded deposits. Saint Petersburg, 1999. 129 c.